ляются одними и теми же точками $A_1, A_2$ и $aA_3+A_4$, т.е. эти плоскости сопадают. 4) Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции $(A_3A_4)$ имеет вид: $(\omega_1)^2-(\omega_2)^2=0$. Из (11) имеем: $dM_1\big|_{\omega_1+\omega_2}=\omega_2^2M_1+(\omega_1^1-\omega_2^2)A_1$, $dM_2\big|_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_2^2M_2+(\omega_1^1-\omega_2^2)A_1$, откуда и вытекает заключение утверждения 4).

Т е о р е м а 3. Поверхность $(A_3)$, огибаемая плоскостями коник $C\in\mathcal{L}_{1,1}$, является линейчатой квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий на поверхности $(A_3)$ записывается в виде: $\omega_1\omega_2=0$. Так как $dA_3=\omega_3^3A_3+a(\omega_1A_2+\omega_2A_1)$, то прямая $A_3A_i$ является асимптотической касательной к линии $\omega_i=0$. Имеем: $d[A_3A_i]\big|_{\omega_i=0}=(\omega_3^3+\omega_i^i)[A_3A_i]$. Следовательно, асимптотические линии $\omega_i=0$ являются прямыми линиями, т.е. поверхность $(A_3)$ – линейчатая квадрика. Уравнение этой квадрики совпадает с уравнением квадрики Ли к поверхности $(A_3)$ в точке $A_3$ и имеет вид:

$$(a^2-1)(x^4)^2+2x^1x^2-2ax^3x^4=0. \tag{12}$$

Т е о р е м а 4. Координатные линии соответствуют асимптотическим линиям на ассоциированной квадрике $(A_3)$.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из уравнения (11).

Т е о р е м а 5. Если $a=1$, то репер $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ является автополярным тетраэдром III рода.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя $a=1$ в уравнение (12), получим уравнение квадрики Ли в виде $x^1x^2-x^3x^4=0$. Такой вид уравнение квадрики Ли принимает в автополярном тетраэдре III рода.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Тр.Геометр.семинара / ВИНИТИ АН СССР.-М., 1981.Т.12.С.31-60.

2. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве: Тр.Геометр.семинара / ВИНИТИ АН СССР.-М., 1974.Т.6.С.113-134.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПАРА КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК

Л.Г. К о р с а к о в а

В [1] в трехмерном проективном пространстве рассматривалась пара $\mathcal{D}$ конгруэнций кривых второго порядка, не лежащих в одной плоскости и имеющих две общие точки, причем плоскости коник образуют двумерные многообразия. Исследован частный класс пар $\mathcal{D}$, для которого получена полная совокупность свойств, позволяющих осуществить геометрическое построение.

Пара $\mathcal{D}$ исследовалась в репере $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где вершины $A_1$ и $A_2$ помещались в точки пересечения коник $C_1$ и $C_2$, $A_3$ и $A_4$ – полюсы прямой $A_1A_2$ относительно коник $C_1$ и $C_2$ соответственно.

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{D}$ называется характеристической, если: 1) коники $C_1$ и $C_2$ конгруэнций $(C_1)$ и $(C_2)$ инцидентны одной квадрике $Q$; 2) поверхности $(A_3)$ и $(A_4)$ являются характеристическими; 3) линии на поверхности $(A_3)$, огибаемые прямыми $A_1A_3$, $A_2A_3$, являются ее асимптотическими линиями.

Коники $C_1$, $C_2$ и квадрика $Q$ в репере $R$ при соответствующей нормировке вершин определяются уравнениями:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0;\ (x^4)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0, \tag{1}$$

$$(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2+2cx^3x^4=0. \tag{2}$$

Система уравнений Пфаффа характеристической пары $\mathcal{D}$ имеет вид:

$$\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=\gamma\omega_i,\ \omega_3^i=\omega_j^3+c\omega_j,\ \omega_4^i=c\omega_j^3+\omega_j, \tag{3}$$

$$\omega_3^4=\omega_4^3=0,\ \Omega_i=0,\quad dc=0,\quad d\gamma=0,$$

где

$$\omega_i^4 \overset{def}{=} \omega_i\ ;\ \Omega_i \overset{def}{=} \omega_i^i+\omega_j^j-2\omega_{i+2}^{i+2}\ ;\quad i,j=1,2;\ i\neq j.$$

Анализируя систему (3), убеждаемся, что она вполне интегрируемая, и для характеристической пары $\mathcal{D}$ справедливы следующие свойства: 1) асимптотические линии на поверхностях $(A_3)$ и $(A_4)$ соответствуют; 2) пара прямолинейных конгруэнций $(A_1A_2)$ и $(A_3A_4)$ односторонне расслояема в направлении от $(A_3A_4)$ к $(A_1A_2)$; 3) прямолинейная конгруэнция $(A_3A_4)$ является связкой, центр которой совпадает с точкой пересечения характеристик плоскостей $(A_iA_3A_4)$; 4) поверхности $(A_3)$ и $(A_4)$ являются невырожденными инвариантными квадриками, причем все три квадрики $Q$, $(A_3)$ и $(A_4)$ касаются инвариантного конуса $K$ вдоль одной и той же коники $C_3$; 5) $(A_i)$-линия, совпадающая с коникой $C_3$; 6) прямые $A_1A_2$ и $A_3A_4$ полярно сопряжены относительно каждой из квадрик $Q$, $A_3$ и $A_4$.

Поверхности $(A_3)$ и $(A_4)$ определяются соответственно уравнениями

$$(\gamma^2-1)(x^4)^2+2x^1x^2-2(\gamma+c)x^3x^4=0;\ (1-\gamma^2)(x^3)^2+2\gamma^2x^1x^2-2\gamma(\gamma c+1)x^3x^4=0.$$

Все три квадрики $Q$, $(A_3)$ и $(A_4)$ пересекаются по одной и той же конике $C_3: (x^4)^2(1+\gamma^2+2\gamma c)-2x^1x^2=0,\ x^3=\gamma x^4.$ Уравнение конуса $K$, которого касаются все квадрики $Q$, $(A_3)$ и $(A_4)$ вдоль коники $C_3$, имеет вид:

$$(1+\gamma^2+2\gamma c)\left[(c+\gamma)x^3+(1+c\gamma)x^4\right]^2-2\left[\gamma(c+\gamma)+(1+\gamma c)\right]^2x^1x^2=0.$$

Указанные свойства позволяют дать геометрическую конструкцию характеристической пары $\mathcal{D}$. Для этого надо прежде всего задать три произвольные квадрики $Q_1, Q_2, Q_3$ и плоскость $\pi$, пересекающую их. Для чего понадобится 3x9+3=30 постоянных. Затем потребуем, чтобы полюс плоскости $\pi$ относительно квадрик $Q_1, Q_2, Q_3$ был один и тот же и чтобы коники, получающиеся при пересечении $Q_1, Q_2, Q_3$ плоскостью $\pi$, совпадали. Для задания такой конструкции нужно иметь 30-8-10=12 постоянных. Затем на конике, являющейся линией пересечения плоскости



$\pi$ с квадриками $Q_1, Q_2, Q_3$, задаем две точки $M$ и $N$. Для этого понадобятся еще две постоянных. Прямую, полярно сопряженную прямой $MN$ относительно квадрики $Q_1$, обозначим через $t$, а точки пересечения прямой $t$ с квадриками $Q_2$ и $Q_3$ — соответственно через $P$ и $L$. Тогда конгруэнция пар коник, образованных при пересечении квадрики $Q_1$ плоскостями $MNP$ и $MNL$, и будет характеристической парой $\mathcal{D}$.

Для доказательства указанную конгруэнцию пар коник отнесем к реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где точки $A_1$ и $A_2$ совмещаются с точками $M$ и $N$ соответственно, а точки $A_3$ и $A_4$ — с $P$ и $L$. Уравнения квадрик $Q_1, Q_2, Q_3$ и плоскости $\pi$ в построенном репере принимают вид:

$$(x^3)^2+a_{44}(x^4)^2+2a_{12}x^1x^2+2a_{34}x^3x^4=0, \tag{4}$$

$$b_{44}(x^4)^2+2x^1x^2+2b_{34}x^3x^4=0, \tag{5}$$

$$c_{33}(x^3)^2+2c_{12}x^1x^2+2c_{34}x^3x^4=0, \tag{6}$$

$$x^3-ax^4=0, \tag{7}$$

причем коэффициенты в уравнениях (4)-(7) должны быть связаны соотношениями:

$$\frac{a^2+a_{44}+2aa_{34}}{a_{12}}=b_{44}+2ab_{34}=\frac{c_{33}a^2+2ac_{34}}{c_{12}}, \tag{8}$$

$$\frac{aa_{34}+a_{44}}{a+a_{34}}=\frac{b_{44}+ab_{34}}{b_{34}}=\frac{ac_{34}}{c_{34}+ac_{33}}. \tag{9}$$

Из условий стационарности плоскости $\pi$ и квадрики $Q_1$ мы получаем следующие соотношения:

$$\omega_i^3=a\omega_i\ ,\ a^2\omega_3^4-\omega_4^3+a(\omega_4^4-\omega_3^3)-da=0,$$

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3+a_{12}\omega_3^j+a_{34}\omega_i=0, \tag{10}$$

$$a_{12}\,\omega_4^i + a_{34}\,\omega_j^3 + a_{44}\,\omega_j = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\,da_{44} + a_{44}\,(\omega_3^3 - \omega_4^4) + a_{44}\,a_{34}\,\omega_3^4 - a_{34}\,\omega_4^3 = 0,$$

$$da_{12} - a_{12}\,(\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) + 2\,a_{12}\,a_{34}\,\omega_3^4 = 0,$$

$$da_{34} + a_{34}\,(\omega_3^3 - \omega_4^4) + 2\,(a_{34})^2\,\omega_3^4 - \omega_4^3 - a_{44}\,\omega_3^4 = 0.$$

Фиксируя первичные параметры, из (10) будем иметь:

$$\tfrac{1}{2}\,\delta a_{44} = a_{44}\,(\pi_4^4 - \pi_3^3),$$

$$\delta a_{12} = a_{12}\,(\pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3).$$

Нормируем вершины репера так, чтобы $a_{44} = 1$, $a_{12} = -1$. С учетом проведенной нормировки, условий стационарности квадрик $Q_2$ и $Q_3$ и соотношений (8)-(9) система пфаффовых уравнений рассматриваемой конгруэнции приводится к виду:

$$\omega_i^j = 0,\ \omega_i^3 = a\,\omega_i,\ \omega_3^j = \omega_i^3 + a_{34}\,\omega_i,\ \omega_4^i = a_{34}\,\omega_j^3 + \omega_j;\ \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0,\ \Omega_1 = 0,\ \Omega_2 = 0,\ da = 0,\ da_{34} = 0. \tag{11}$$

Система (11) с точностью до обозначений совпадает с системой пфаффовых уравнений (3), определяющих характеристическую пару $\mathcal{D}$, что и доказывает наше утверждение.

## Библиографический список

1. К о р с а к о в а Л.Г. Пары конгруэнций коник в $P_3$, не касающихся линии пересечения своих плоскостей // Тез. докл. Всесоюзн. конф. по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского". – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. С. 104.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 17 1986

УДК 514.75

# КОМПЛЕКСЫ ЭЛЛИПСОИДОВ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ С НИМИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М.В. К р е т о в

В трехмерном аффинном пространстве $\widetilde{A}_3$ исследуются комплексы $W_3$ эллипсоидов $q$, допускающие существование не более четырех классов ассоциированных с ними отображений $f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_x}$, введенных в работе [1]. Наиболее полно изучены подклассы $W_3^\circ$ комплексов $W_3$, выделенные из них при условии, что диаметральная гиперплоскость $P$ параллельна хотя бы одной из основных гиперплоскостей $\Pi_\varphi$ отображения $\varphi$ или $\Pi_\psi$ отображения $\psi$ [2]. Для комплексов $W_3^\circ$ существует отображение $f_2$ [3], которое позволяет дать геометрическую интерпретацию характеристическому многообразию [4] эллипсоида $q$, описывающего рассматриваемое многообразие. Полностью геометрически охарактеризованы индикатрисы отображений $\varphi$ и $\psi$ [2]. На основе полученных геометрических свойств рассматриваемых многообразий построено их безынтегральное представление.

Отнесем пространство $\widetilde{A}_3$ к подвижному реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i,\quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j,\quad i, j, k, \ldots = \overline{1,3}, \tag{1}$$

а линейные дифференциальные формы $\omega^i$, $\omega_i^j$ удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 1. Комплекс эллипсоидов в $\widetilde{A}_3$, в котором на эллипсоиде $q$ с центром в точке $A$ име-